**Задачи на инвариант.**

Олимпиадные задачи на инварианты можно условно разбить на два вида: те, в которых требуется доказать некий инвариант, т.е. он явно определен, и те, в которых инвариант используется при решении и сразу не очевиден. Принцип решения задач основан на поиске характеристики объекта, которая не меняется при выполнении действий, указанных в задаче (инвариант объекта). Стандартным является рассуждение: пусть на некотором шаге получился объект А. Применим к нему указанное действие и получим объект В. Что у них общего? Что изменилось?

Задача 1. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 101. Стирают произвольные числа и записывают разность стертых чисел, повторяют эту операцию 100 раз и в результате получают число Р. Докажите, что Р отлично от нуля.

Задача 2. 100 фишек стоят в ряд. Любые две фишки, расположенные через одну, можно менять местами. Удастся ли расположить фишки в обратном порядке?

Задача 3. Разместить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 по одному около вершин треугольника и около середин его сторон так, чтобы сумма трех чисел, расположенных около любой стороны, была одна и та же.

Задача 4: Можно ли в таблице 5 Х 5 клеток расставить 25 чисел так, чтобы сумма четырех чисел в каждом квадрате 2 Х 2 была отрицательной, а сумма всех 25 чисел положительной?

Задача 5. Записано 4 числа: 0, 0, 0, 1.За один ход разрешается прибавить по 1 к любым двум из этих чисел. Можно ли за несколько ходов получить 4 одинаковых числа?

Задача 6. Даны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум числам прибавлять 1 . Можно ли все шесть чисел сделать равными?

Задача 7. Новая шахматная фигура “жираф” ходит “буквой г” на четыре клетки в одном направлении и на пять клеток - в другом. Какое наибольшее число “жирафов” можно расставить на шахматной доске так, чтобы ни один не мог напасть на другого, сколько бы он ни ходил?

Задача 8. Расставьте в вершинах куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы сумма четырех чисел, расположенных на каждой из шести граней куба, была одинакова.

**Задачи с геометрическим содержанием.**

   Задачи с геометрическим содержанием выделены в отдельный параграф, но предполагается, что такие задачи могут решаться в течение всего подготовительного курса. Эти задачи позволяют развивать пространственное мышление и комбинаторные способности, и поэтому обращаться к ним следует по возможности систематически.

**Задача 1.**Сколько углов образуют 5 различных лучей, направленных из одной точки?

 **Задача 2.**Определите, чему равен угол между часовой и минутной стрелками часов в 23 часа 45 минут.

 **Задача 3.**Разрежьте треугольник на два треугольника, четырехугольник и пятиугольник, проведя две прямые линии.

 **Задача 4.**Разрежьте прямоугольник размером 4 \* 8 на девять квадратов.

**Задача 5.**На прямой через равные промежутки поставили 10 точек, они заняли отрезок длины a. На другой прямой через те же промежутки поставили 100 точек, они заняли отрезок длины b. Во сколько раз a меньше b?

 **Задача 6.**Расположите на плоскости 14 точек и соедините их, не пересекая, отрезками прямых так, чтобы из каждой точки выходило ровно четыре отрезка.

 **Задача 7.**Разрежьте фигуру по линиям клеток так, чтобы получились четыре равные фигуры.

**Задача 8.**Разрежьте фигуру на три равные части:

 **Задача 9.**Дан прямоугольник. Вдоль какой прямой его надо разрезать так, чтобы из двух получившихся частей можно было сложить ромб? Постройте эту прямую с помощью циркуля и линейки.

 **Задача 10.**Разрежьте прямоугольник, длина которого 9 см, а ширина 4 см, на две равные части, из которых можно составить квадрат.

**Задача 11.**

Из точки О на плоскости выходят четыре луча ОА, ОВ, ОС и ОД (не обязательно в этом порядке). Известно, что АОВ = 40 , ВОС = 70 , СОД = 80 .Какие значения может принимать величина угла между лучами ОА и ОД? (Величина угла между лучами - от 0 до 180 .)

 **Задача 12.**Разделите фигуру на четыре равные части:

 **Задача 13.**Стальную плитку размерами 73 х 19 см обвели карандашом на бумаге. Найдите центр полученного прямоугольника, имея только плитку и карандаш.

 **Задача 14.** Из фигурок, вид которых показан на рисунке, сложите квадрат.

 **Задача 15.**На бумаге нарисован квадрат размером 5 х 5 клеточек. Покажите, как разрезать его по сторонам клеточек на 7 различных прямоугольников.

 **Задача 16.**Разрежьте угол 8 х 8 на уголки из трех клеток (см. рис.)

**Задача 17.**Дан угол в 190.Как с помощью циркуля и линейки построить угол в 10?

 **Задача 18.**Сколько получится острых углов, если внутри данного острого угла из его вершины провести 3 луча?

**Задача 19.**Имеется монета. Сколько нужно таких же монет, чтобы их можно было расположить вокруг данной монеты так, чтобы все они касались данной монеты и попарно друг друга?

**З**Прямоугольник 17Прямая соединительная линия 16**адача 20.**Можно ли из одного куска проволоки получить такую фигуру, как на рисунке?

**Задача 21.**В точке А расположен гараж снегоочистительных машин. Одному водителю было поручено убрать снег с улиц части города, план которого изображен на рисунке. Может ли он закончить свою поездку на том перекрестке, где находится гараж, если по каждой улице своего участка города он может проехать только по одному разу?

**Задача 22.**Можно ли из проволоки, длина которой 20 см, согнуть такой треугольник, одна сторона которого была бы равна:1) 8 см, 2) 10, 3) 12?

**Задача 23.**Как, не отрывая карандаш от бумаги, разделить фигуру на рисунке на шесть равных треугольников?

 **Задача 24.**Дан квадрат со стороной 4 см. В него вписан второй квадрат так, что вершинами его служат средние точки сторон первого. В получившийся квадрат таким же образом вписан третий квадрат. Вычислите периметр и площадь третьего квадрата.

 **Задача 25.**На прямой линии отмечены n точек. Сколько лучей на ней они определяют?

**Задача 26.**Имеются 13 равных квадратов. Как составить из них два квадрата?

 **Задача 27.**Листочек бумаги надо разрезать на 8 частей, ограниченных отрезками. Сколько разрезов нужно для этого сделать?

 **Задача 28**.Постройте замкнутую линию, состоящую из трех звеньев и проходящую через четыре данные точки, являющиеся вершинами квадрата.

  **Задача 29.**На плоскости даны 10 точек, из которых каждая соединена с каждой из остальных отдельной линией. Сколько таких линий?

 **Задача 30.**Можно ли прямоугольник 34 х 20 покрыть без наложений прямоугольниками 2 х 3 и 3 х 3, не выходя за границы большого прямоугольника?